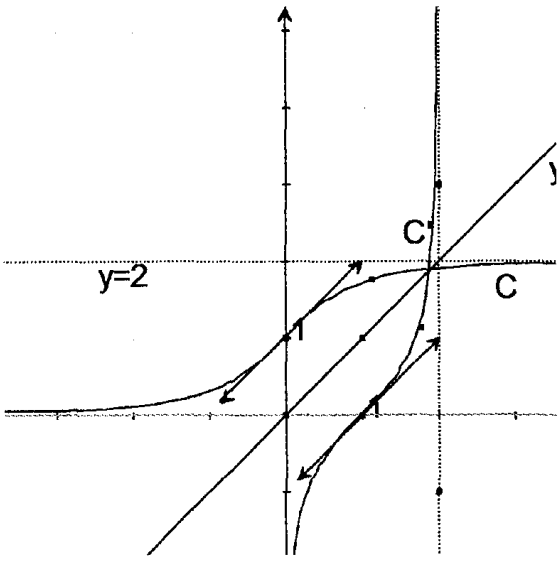

3) a) f est continue et strictement croissante sur IR , elle réalise donc une bijection de IR sur f(IR)=]0,2[

b) $y = f^{-1}(x)$ avec $\begin{vmatrix} x \in]0,1[\\ y \in \mathbb{R} \end{vmatrix}$

$$\Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow 1 + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = x \Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = x - 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{1+y^2} = (x-1)^2$$

avec y et (x-1) de même signe (*)

$$\Leftrightarrow y^2 = (x-1)^2 y^2 + (x-1)^2 \Leftrightarrow (2x - x^2) y^2 = (x-1)^2 \Leftrightarrow y^2 = \frac{(x-1)^2}{2x-x^2} \Leftrightarrow y = \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}$$

d'après (*) d'où $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}$

c) $(C_{f^{-1}}) = S_{\Delta}(C)$ avec Δ :y=x

d) f est dérivable sur IR et $f'(x) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \neq 0$ d'où f^{-1} est dérivable sur]0,2[

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}} \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{\sqrt{2x-x^2} - (x-1)\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}}{2x-x^2}$$

$$\Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{(2x-x^2)+(x-1)^2}{(\sqrt{2x-x^2})^3} = \frac{1}{(\sqrt{2x-x^2})^3}$$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn